运筹学

我想分享运筹学基础的概念和在计算机中的应用。
我认为，运筹学主要描述建模的过程，由各种的假设得到各种分布、过程，进而进行决策。

无记忆性和随机变量的分布

1. 唯一具备无记忆性的连续随机变量分布是指数分布。

$$P\{X>s+t\}=P\{X>s\}P\{X>t\} \Leftrightarrow F(x)=P\{X\leq x\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{if } x\geq 0,\\ 0, & \text{if } x<0.\end{cases}$$

   我们只验证无记忆性推导到指数分布：设$g(s)=P\{X>s\}$，则:

$$\begin{aligned}&P\{X>s+t\}=P\{X>s\}P\{X>t\}\\ &\Leftrightarrow g(s+t)=g(s)g(t)\\ &\Rightarrow g(2/n)=g(1/n)g(1/n)\\ &\Rightarrow g(m/n)=g(1/n)^m, g(1)=g(1/n)^n\\ &\Rightarrow g(m/n)=g(1/n)^m=(g(1)^{1/n})^m=g(1)^{m/n}\\ &\Rightarrow g(x)=g(1)^x=e^{-\lambda x}, \lambda=-\ln g(1)\end{aligned}$$

2. 唯一具备无记忆性的离散随机变量分布是几何分布。
   $P\{X>s+t\}=P\{X\geq s\}P\{X>t\} \Leftrightarrow P(x=n)=(1-p)^{n-1}p, n\in\mathbb{N}^+$
   同样我们验证从左边式子推导到右边：

$$\begin{aligned}&P\{X>s+t\}=P\{X\geq s\}P\{X>t\}\\ &\Rightarrow P\{X>k+t\}=P\{X\geq k\}P\{X>t\}\text{且}P\{X>s+k\}=P\{X\geq s\}P\{X>k\}\\ &\Rightarrow P\{X\geq k\}\sum_{t=1}^{\infty}P\{X>t\}=\sum_{t=1}^{\infty}P\{X>k+t\}=\sum_{s=1}^{\infty}P\{X>k+s\}=P\{X>k\}\sum_{s=1}^{\infty}P\{X\geq s\}\\ &\Leftrightarrow P\{X\geq k\}\sum_{t=1}^{\infty}P\{X>t\}=P\{X>k\}\sum_{s=1}^{\infty}P\{X\geq s\}\\ &\Leftrightarrow P\{X\geq k\}\sum_{t=2}^{\infty}P\{X\geq t\}=P\{X\geq k+1\}\sum_{t=1}^{\infty}P\{X\geq t\}\end{aligned}$$

   我们取$k=1$，设$p=P\{x=1\}$，设$\alpha=\sum_{t=2}^{\infty}P\{X\geq t\}$，则$1*\alpha=(1-p)(1+\alpha)$，得到$\alpha=(1-p)/p$，代入原式得到$P\{X\geq k\}\alpha=P\{X\geq k+1\}(1+\alpha)$，即$(1-p)P\{X\geq k\}=P\{X\geq k+1\}$。于是$P\{X\geq k\}=(1-p)^{k-1}$，因此$P\{X=k\}=P\{X\geq k\}-P\{X\geq k+1\}=p(1-p)^{k-1}$
3. 泊松（Poisson）分布
   $P\{X=i\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, i=0,1,\ldots$。
   性质：二项分布（n次独立重复试验，每次实验成功概率为p，则实验成功k次的概率为$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$）在n很大，p很小的时候近似于泊松分布。

随机过程

我们平常接触得比较多的是随机变量的分布，但要是考虑时间流动，随机变量的分布可能会变。我们怎么建模这种现象？随机过程！
随机过程$\mathbf{X}=\{X(t), t\in T\}$是一组随机变量。也就是说，对于任意的$t\in T$，$X(t)$是一个随机变量。

随机过程特殊性质：

- 独立增量（independent increments）：对于所有的$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量$X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立。
- 稳定增量（stationary increments）：$\forall s, X(s+t)-X(s)$都有相同的分布。

自然语言处理中“语言是稳态的可遍历性的随机过程”中“稳态”就是上面的稳定增量，指的是“从今天《人民日报》和明天《人民日报》分别采样得到的汉语统计特征是一样的”。

泊松过程

记$N(t)$为$[0,t]$内发生的事件个数，则$\{N(t),t\geq 0\}$被称作计数过程。
泊松过程（参数为λ）是满足如下性质的计数过程：

1. $N(0)=0$
2. 随机过程是独立增量的
3. 任意一个长度为t的时间段内事件数量服从λt的泊松分布。即$\forall t\geq 0,\forall s\geq 0,P\{N(s+t)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$
   显然泊松过程也具备稳定增量的性质。

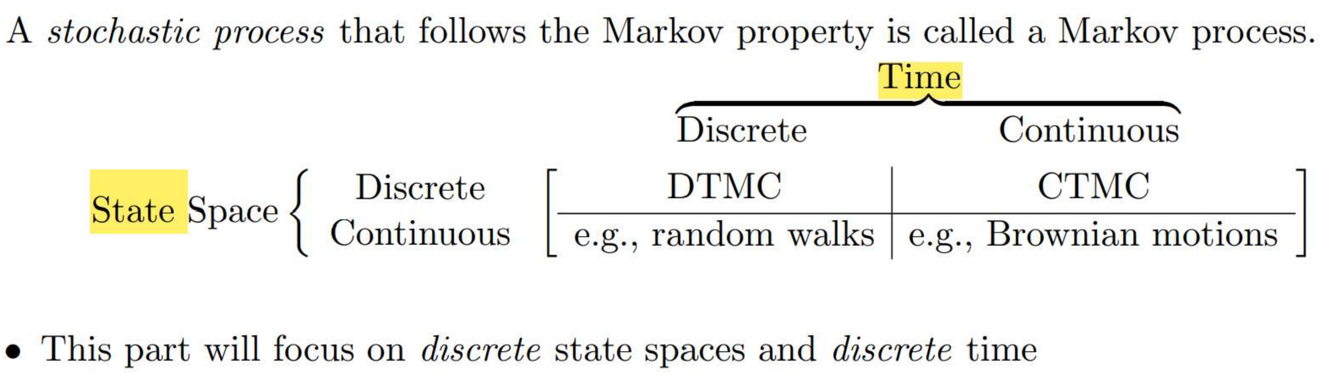
泊松过程和指数分布

记X_n为第$n-1$个事件和第n个事件之间的时间长度。泊松过程（参数为λ）等价于$X_n(\forall n=1,2,\ldots)$服从参数为λ的指数分布。
证明：

$$
\begin{gathered}
P\{X_1\geq t\}=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}\\
P\{X_2>t|X_1=s\}=P\{0\ events\ in\ (s,s+t]|X_1=s\}\\
=^{independent}P\{0\ events\ in\ (s,s+t]\}\\
=^{stationary}P\{0\ events\ in\ (0,t]\}=e^{-\lambda t}
\end{gathered}
$$

马尔科夫性与马尔科夫过程

- Markov Property:给定当前状态，未来状态和过去状态无关。
  $P\{\text{Future}|\text{Present,Past}\}=P\{\text{Future}|\text{Present}\}$
- 马尔科夫过程分类：



DTMC

- homogeneous Discrete-Time Markov Chain：$P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=p_{ij}$，时间、状态离散，且转移概率和时间无关。
- Chapman-Kolmogorov 等式：记从 i 状态花 n 步转移到 j 状态的概率为p_{ij}^n，则$p_{ij}^{n+m}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}^n p_{kj}^m,\forall n,m\geq 0,\forall i,j$。矩阵形式：$P^{(n+m)}=P^{(n)}P^{(m)},P_{ij}^{(n)}=p_{ij}^n$
- state 的分类：recurrent（常返）和transient（瞬态）。j是recurrent的当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}p_{jj}^n=\infty$。
- 例子1：PageRank：若ij间有链接，则$p_{ij}=1/d_i$，其中d_i表示i的度数。Page i 的分数记为π_i的话，则$(\pi_1,\pi_2,\ldots)=\pi=\pi P$。
- 例子2：HMM（隐马尔科夫模型）：每个输出序列对应着一个隐藏状态序列，输出是关于隐藏状态的随机变量，隐藏状态是个DTMC。
- 例子3：CRF（条件随机场）：NLP和图像处理中的序列标注和结构划分问题。给定观察序列X，输出标识序列Y，通过计算$P(Y|X)$求解最优标注序列。
  若对于无向图$G=(V,E)$，V中每个节点对应于Y_v的随机变量，且满足$p(Y_v|X,Y_w,w\neq v)=p(Y_v|X,Y_w,(v,w)\in E)$，$\forall v,w\in V$，则$(X,Y)$为条件随机场。
  比如NLP中词性标注任务：X就是句子，Y是我们要给每个字标注的词性，词性之间有马尔科夫性（当前字的词性仅仅和前面1个字的词性有关）
  比如图像处理中的分割任务：X就是所有像素，Y就是我们要给每个像素打的标签，某个像素点的标签仅仅和相邻4个像素点的标签有关。

CTMC

- homogeneous Continuous-Time Markov Chain：$P_{ij}(t)=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\},\forall s$。CTMC=DTMC+在状态上的停留时间服从指数分布。
- 生灭过程（Birth and Death process）：某个时刻系统内有n个人，那么下一个人到达系统的时间间隔服从λ_n的指数分布，系统内下一个离开的人的时间间隔服从μ_n的指数分布。

queueing theory

- 网络流量测量的几个重大发现：数据对话请求（session）的到达服从泊松分布，或者说，用户访问服从泊松分布。
- 数据包（package）的到达不服从泊松分布（数据包到达具有突发性）
- 为什么要研究泊松分布？还记得我们先前说二项分布近似于泊松分布在什么样的场景下吗？人数量很多（n），每个人在此时选择此项服务的概率（p）很小。
  因此，现实中很多场景会出现泊松分布。
  泊松过程建模的是时间段内发生的事件数量，等价于事件间隔时间服从指数分布。

因此最经典的排队论模型：M/M/1，M（下一个用户到达时间服从指数分布）/M（服务器服务当前一个人的时间服从指数分布）/1（一个服务器）

MDP

MDP：在DTMC的基础上，引入动作（action）和奖励（reward）的概念，动作（action）对应着我们可以影响状态和状态之间的转移概率，每个状态对应着一个值（v，代表这个状态下获得的期望回报），奖励在采取动作后获得。

Inventory theory

Inventory theory：每天早上进货，当天的需求未知，进货进多了卖不，进货进少了利润不高。

- newsvendor model（报童模型）：单份报纸卖 p元，单份报纸成本为c元，当天需求D的累积分布函数$\Phi()$未知，求最优进货数量y?
  期望收益为:$E_D[p\min(D,y)-cy]$，求导为0得到$\Phi(y^*)=\frac{p-c}{p}$。
  证明：

$$
\begin{aligned}
&E_D[p\min(D,y)-cy]\\
=&E_D[pD+p\min(0,y-D)-cD+c(D-y)]\\
=&E_D[pD-cD]+E_D[p\min(0,y-D)]+cE_D[(D-y)]\\
=&(p-c)E_D[D]-pE_D[\max(0,D-y)]+cE_D[(D-y)^+-(D-y)^-]\\
=&(p-c)E_D[D]-pE_D[(D-y)^+]+cE_D[(D-y)^+-(D-y)^-]\\
=&(p-c)E_D[D]-(p-c)E_D[(D-y)^+]-cE_D[(D-y)^-]
\end{aligned}
$$

  $\max$上式等价于最小化$L=(p-c)E_D[(D-y)^+]+cE_D[(D-y)^-]=(p-c)\int_y^\infty(z-y)\phi(z)d(z)+c\int_0^y(y-z)\phi(z)dz$。而$\frac{\partial L}{\partial y}=(p-c)[-1(1-\Phi(y))]+c\Phi(y)=c-p+p\Phi(y)=0$
  这里用了个公式：$\frac{d}{dt}\int_{h(t)}^{g(t)}F(x,t)dx=F(h,t)\frac{dh(t)}{t}-F(g,t)\frac{dg(t)}{t}+\int_{h(t)}^{g(t)}\frac{dF(x,t)}{dt}dx$。
  因此$\frac{d}{dy}\int_y^\infty(z-y)\phi(z)d(z)=0-0*1+\int_y^\infty-\phi(z)d(z)=-(1-\Phi(y))$。

下半部分的主题

- 博弈论
- 线性规划
- 非线性规划
- 组合优化
- 复杂性理论